

Colle du 23/09 - Sujet 1
Logique et fonctions

Question de cours.

1. Définir logiquement une implication.
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1. Etudier la fonction $f : x \mapsto x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Exercice 2. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y.$$

Colle du 23/09 - Sujet 2
Logique et fonctions

Question de cours.

1. Comment obtient-on le graphe de $g_2 : x \mapsto f(x + a)$?
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + (-1)^n$.

Exercice 1. Etudier $f : x \mapsto \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Colle du 23/09 - Sujet 3
Logique et fonctions

Question de cours.

1. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation d'une implication.
2. Résoudre l'équation $(E) : x = \sqrt{3 - 2x}$.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2^{n+1}$. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de v_n en fonction de n et en déduire u_n .

Exercice 2. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.